



Συντονισμοί και χάος σε χαμιλτονιανά συστήματα

Ιωάννης Γκόλιας – Επίκουρος καθηγητής ΑΠΘ

Συντονισμοί στο Ηλιακό μας σύστημα

- Συντονισμοί μέσης κίνησης (mean motion)
 - Συντονισμοί μεταξύ των τροχιακών περιόδων δύο σωμάτων
- Αιώνιοι συντονισμοί (secular)
 - Συντονισμοί μεταξύ των συχνοτήτων μεταβολής του προσανατολισμού του περίκεντρου και του επιπέδου της τροχιάς.
- Συντονισμοί περιστροφής-τροχιάς (spin-orbit)
 - Συντονισμοί μεταξύ της τροχιακής και της περιστροφικής συχνότητας ενός σώματος

Περιστροφική κίνηση ουρανίων σωμάτων

Τι παρατηρούμε;



Μοντέλο σύζευξης περιστροφής-περιφοράς

Το μοντέλο **σύζευξης περιστροφής-περιφοράς** στην ουράνια μηχανική έχει χρησιμοποιηθεί για εξηγήσει μια σειρά από παρατηρούμενα φαινόμενα στο ηλιακό μας σύστημα

- Περιγράφει την σύγχρονη περιστροφή των μεγάλων πλανητικών δορυφόρων
- Εξηγεί την σχέση περιόδου περιφοράς και περιστροφής (3:2) του Ερμή
- Εξηγεί την χαοτική περιστροφή του Υπερίωνα
- Περιγράφει διπλά συστήματα αστεροειδών
- Επιτρέπει την σταθερή περιστροφή τεχνητών δορυφόρων γύρω από την Γη

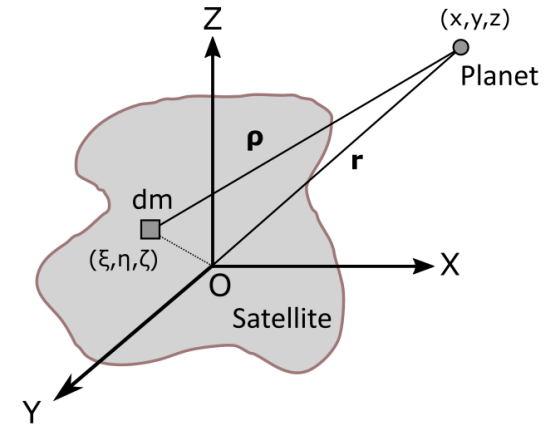
Μοντέλο σύζευξης περιστροφής-περιφοράς

Βαρυτική αλληλεπίδραση

Δυναμικό $V = -G \int \frac{1}{\rho} dm$

όπου $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$

$(x, y, z) \gg (\xi, \eta, \zeta)$ ανάπτυγμα Taylor



$$V = \underbrace{-\frac{Gm_{sat}}{r}}_{\text{μηδενικής τάξης}} - \underbrace{\frac{G(A + B + C)}{2r^3} + \frac{3G(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{2r^5}}_{\text{δεύτερης τάξης}} + \dots$$

ροπές αδράνειας $A = \int (\eta^2 + \zeta^2) dm, \quad B = \int (\xi^2 + \zeta^2) dm, \quad C = \int (\xi^2 + \eta^2) dm$

Μοντέλο σύζευξης περιστροφής-περιφοράς

Βαρυτική αλληλεπίδραση

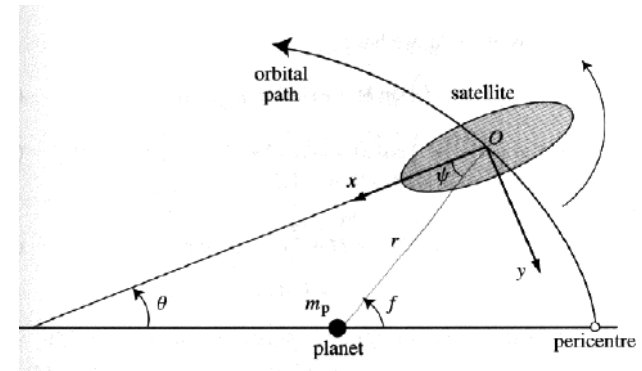
$$\text{δυνάμεις } F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\text{ροπές } N_x = zF_y - yF_z, \quad N_y = xF_z - zF_x, \quad N_z = yF_x - xF_y$$

$$N_z = \frac{3G(B - A)xy}{r^5}$$

εξισώσεις του Euler

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z &= N_x \\ B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x &= N_y \\ C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y &= N_z \end{aligned}$$



Υπόθεση: ο άξονας περιστροφής είναι **κάθετος** στο επίπεδο της τροχιάς

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \dot{\theta}$$

Μοντέλο σύζευξης περιστροφής-περιφοράς

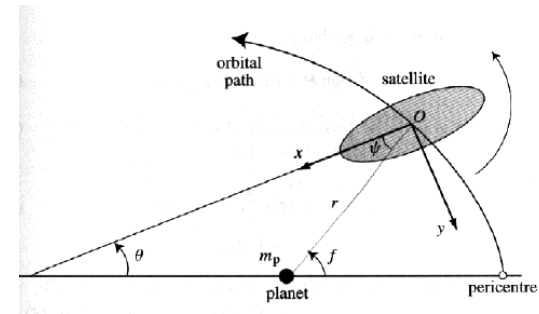
Εξίσωση κίνησης

Περιστροφή γύρω από άξονα z

$$\frac{x}{r} = \cos\psi, \quad \frac{y}{r} = \sin\psi$$

$$\psi = f - \theta$$

$$C\ddot{\theta} = \frac{3G(B-A)xy}{r^5}$$

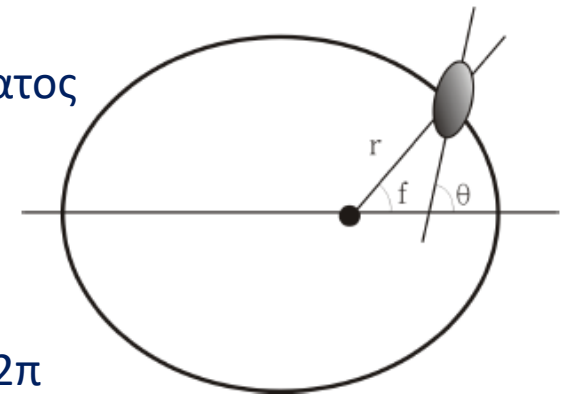


$$\ddot{\theta} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{r(t)} \right)^3 \sin(2\theta - 2f(t)) = 0$$

όπου $\varepsilon = \sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$ η ασφαιρικότητα του σώματος

Για την τροχιακή κίνηση θεωρώ: $n = a = 1$

και άρα $f(t), r(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π



Μοντέλο σύζευξης περιστροφής-περιφοράς

Χαμιλτονιανή

Η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το πρόβλημα είναι **ενός βαθμού ελευθερίας με εξάρτηση από τον χρόνο**

$$H(p_\theta, \theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{r^3(t)} \cos(2\theta - 2f(t))$$

Ολοκληρώσιμες περιπτώσεις:

α) Όταν η **ασφαιρικότητα** είναι **μηδέν**, που σημαίνει πως ο δορυφόρος είναι **αξισυμμετρικός** ($A=B$), τότε δεν υπάρχει ροπή στο σώμα και αυτό περιστρέφεται ελεύθερα.

β) Όταν η **εκκεντρότητά** είναι **μηδέν**, δηλαδή η τροχιά είναι **κυκλική**, η απόσταση r είναι σταθερή και η αληθής ανωμαλία f είναι ίση με τον χρόνο. Περνώντας στο περιστρεφόμενο σύστημα η χαμιλτονιανή παίρνει την μορφή του **απλού εκκρεμούς**.

Μοντέλο σύζευξης περιστροφής-περιφοράς

Παράμετροι του συστήματος

Οι δύο βασικοί παράμετροι του συστήματος είναι η **εκκεντρότητα** της τροχιάς και η **ασφαιρικότητα** του δορυφόρου. Όταν και οι δύο είναι διάφορες του μηδενός το σύστημα είναι **μη-ολοκληρώσιμο** και εμφανίζει μια πληθώρα **μη-γραμμικών φαινομένων**.

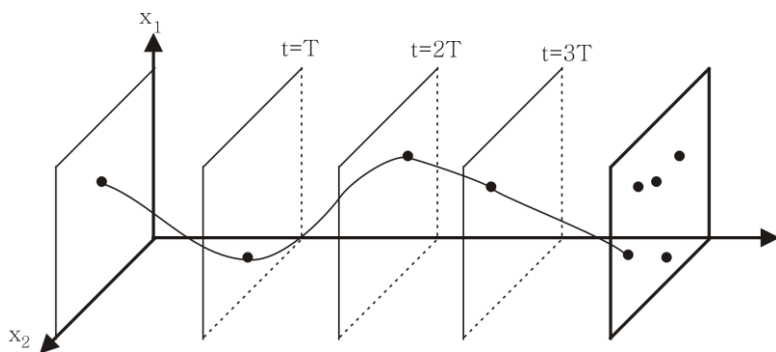
Παραδείγματα συστημάτων από το Ηλιακό μας σύστημα

	Moon	Mercury	Hyperion	Enceladus	KW4 1999
e	0.0549	0.206	0.1236	0.0045	0.0019
ϵ	0.026	0.0187	0.89	0.336	0.7873

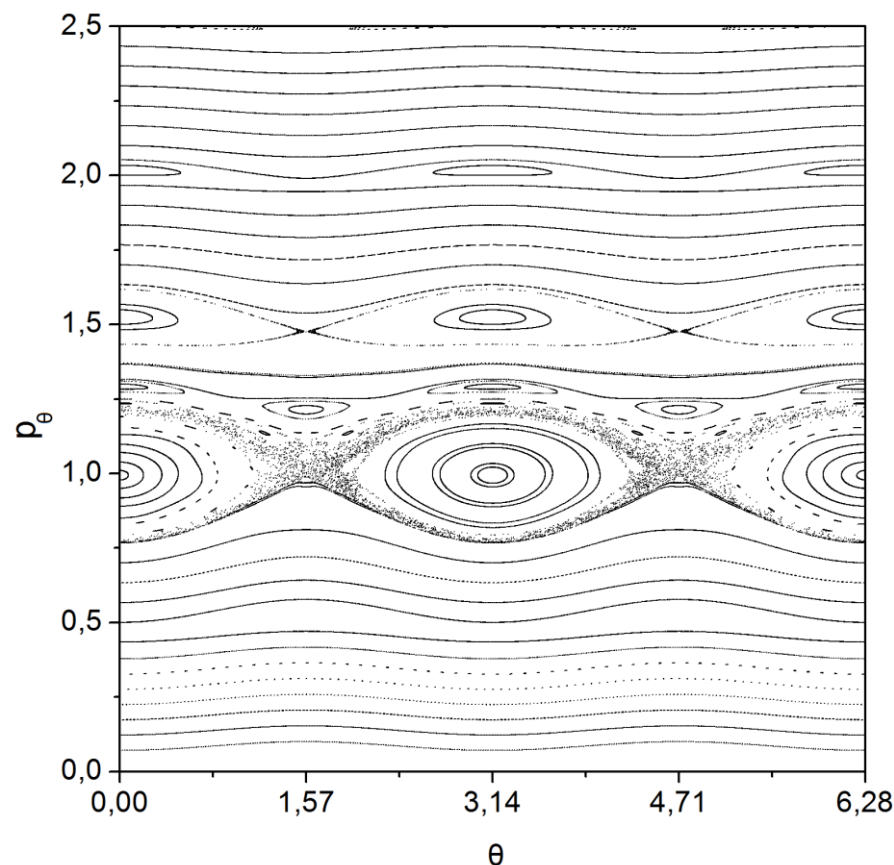


Τομές Poincaré

Η μελέτη του συστήματος γίνεται μέσω στροβοσκοπικών τομών Poincaré



Καταγραφή της γωνίας θ και της συζυγούς ορμής της κάθε φορά που ο δορυφόρος περνάει από το περίκεντρο της τροχιάς του.



Τομή Poincaré για τις παραμέτρους της Σελήνης

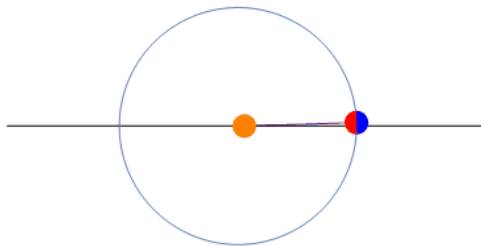
Κύριοι Συντονισμοί

Κύριους συντονισμούς περιστροφής-περιφοράς έχουμε όταν η **τροχιακή συχνότητα** του δορυφόρου είναι **ρητό** πολλαπλάσιο της **συχνότητας περιστροφής** του

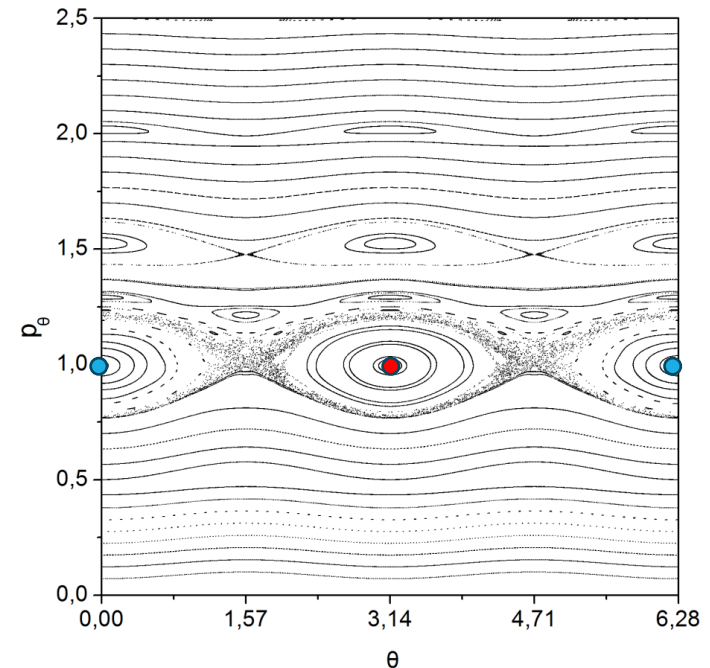
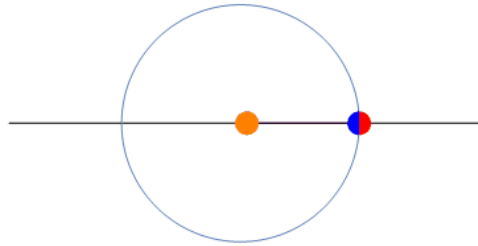
$$\frac{\dot{\theta}}{n} = \frac{m}{k} \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$

Συντονισμός 1:1 – Σύγχρονη περιστροφή

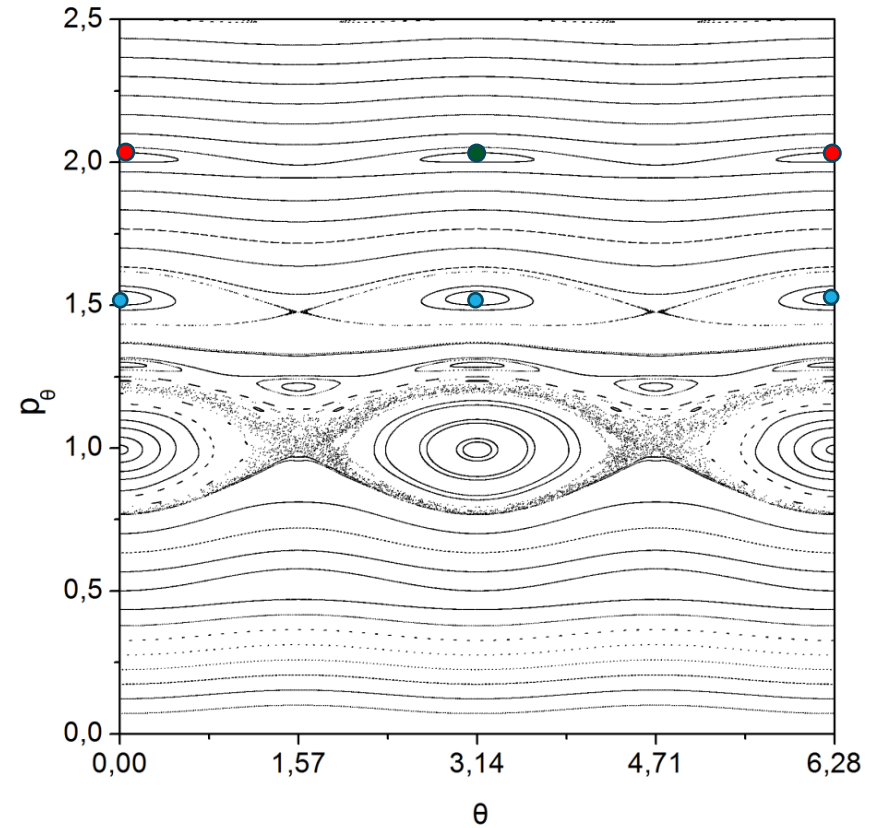
Περιοδική τροχιά ●



Περιοδική τροχιά ●



Κύριοι Συντονισμοί



Αναλυτική περιγραφή των συντονισμών

$$H(p_\theta, \theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{r^3(t)} \cos(2\theta - 2f(t))$$

Εξάρτηση από τον χρόνο $\dot{f} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + e \cos f)^2$ $r(t) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(f(t))}$

Για να προχωρήσουμε με την αναλυτική περιγραφή πρέπει να γίνει ρητή η εξάρτηση από τον χρόνο – Taylor-Fourier ανάπτυγμα.

$$H(p_\theta, p_t, \theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2} + p_t - \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} W\left(\frac{m}{2}, e\right) \cos(2\theta - mt)$$

Οι συντελεστές W είναι δυναμοσειρές της εκκεντρότητας, μέχρι δεύτερη τάξη έχω:

$$W(1, e) = -\frac{e}{2} + \dots, \quad W(2, e) = 1 - \frac{5}{2}e^2 + \dots, \quad W(3, e) = \frac{7}{2}e + \dots$$

Αναλυτική περιγραφή των συντονισμών

Η Χαμιλτονιανή κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς την εκκεντρότητα είναι:

$$H \approx \frac{p_\theta^2}{2} + p_t - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\underbrace{\frac{17}{2} e^2 \cos(2\theta - 4t)}_{2:1} + \underbrace{\left(1 - \frac{5e^2}{2}\right) \cos(2\theta - 2t)}_{1:1} - \underbrace{\frac{1}{2} e \cos(2\theta - t)}_{1:2} + \underbrace{\frac{7}{2} e \cos(2\theta - 3t)}_{3:2} \right)$$

Για να κατασκευάσω μια ολοκληρώσιμη προσέγγιση για τον συντονισμό 1:1 μετασχηματίζω την Χαμιλτονιανή στις **μεταβλητές του συντονισμού** μέσω του κανονικού μετασχηματισμού

$$p_\theta = J'_\psi, p_t = J_\phi - J'_\psi, \theta = \psi + \phi, t = \phi, J_\psi = J'_\psi - 1$$

$$\psi = \theta - t \quad \text{η γωνία του συντονισμού}$$

$$H = \frac{J_\psi^2}{2} + J_\phi - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\left(1 - \frac{5e^2}{2}\right) \cos(2\psi) + \frac{17}{2} e^2 \cos(2(\phi - \psi)) - \frac{1}{2} e \cos(2\psi + \phi) + \frac{7}{2} e \cos(\phi - 2\psi) \right)$$

Αναλυτική περιγραφή των συντονισμών

Όταν βρίσκομαι στην “γειτονιά” του συντονισμού

$$\dot{\theta} - n \approx 0$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας ψ είναι πολύ πιο αργός σε σχέση με την γωνιά ϕ ($=t$). Συνεπώς οι όροι που περιέχουν το ϕ ταλαντώνονται γρήγορα. Αν ολοκληρώσω το σύστημα ως προς ϕ

$$H_{avg} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H d\phi \quad (\text{averaging})$$

$$H = \frac{J_\psi^2}{2} + J_\phi - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\left(1 - \frac{5e^2}{2}\right) \cos(2\psi) + \frac{17}{2}e^2 \cos(2(\phi - \psi)) - \frac{1}{2}e \cos(2\psi + \phi) + \frac{7}{2}e \cos(\phi - 2\psi) \right)$$

$$H_{1:1} = \frac{J_\psi^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \cos(2\psi)$$

Σε πρώτη προσέγγιση η δυναμική στη «γειτονιά» του συντονισμού 1:1 περιγράφεται από ένα **εκκρεμές!** Παρόμοια μπορώ να εργαστώ και με τους υπόλοιπους συντονισμούς.

Αναλυτική περιγραφή των συντονισμών

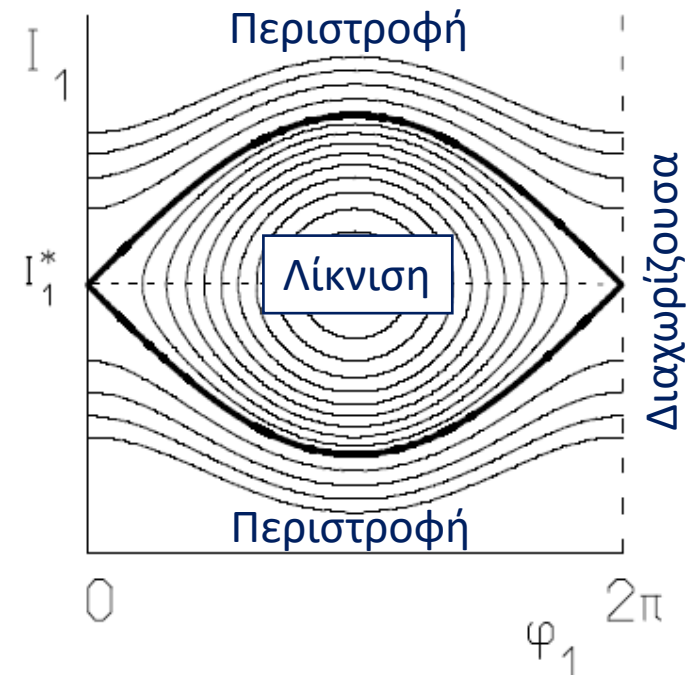
Σε παρόμοια αποτελέσματα καταλήγουμε κατά την ανάλυση διαφόρων φαινομένων συντονισμού. Το απλό εκκρεμές αποτελεί το **Πρώτο Βασικό Μοντέλο Συντονισμού**.

$$H_{res} = \frac{I_1^2}{2} + c \cos \phi_1$$

Βασικά χαρακτηριστικά:

Συχνότητα λικνίσεων: $\omega_{lib} = \sqrt{c}$

Ημι-εύρος συντονισμού: $\Delta = 2\sqrt{c}$



Αναλυτική περιγραφή των συντονισμών

Συντονισμός 1:1

Αναλυτική προσέγγιση:
$$H_{1:1} = \frac{J_\psi^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 \right) \cos(2\psi)$$

Χαρακτηριστικά:
$$\Delta_{1:1} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{5}{2}e^2 + O(e^4)} \quad \omega_{lib,1:1} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{5}{2}e^2 + O(e^4)}$$

Συντονισμός 3:2

Αναλυτική προσέγγιση:
$$H_{3:2} = \frac{J_\psi^2}{2} - \frac{7\varepsilon^2 e}{8} \cos(2\psi)$$

Χαρακτηριστικά:
$$\Delta_{3:2} = \varepsilon \sqrt{\frac{7}{2}e + O(e^3)} \quad \omega_{lib,3:2} = \varepsilon \sqrt{\frac{7}{2}e + O(e^3)}$$

Για τις τιμές των παραμέτρων του Ερμή $\Delta_{1:1} = 0.0177, \quad \Delta_{3:2} = 0.0159$

Δευτερεύοντες συντονισμοί

Ένας δευτερεύοντας συντονισμός εμφανίζεται όταν η **συχνότητα των λικνίσεων** γίνει **ρητό πολλαπλάσιο** της **συχνότητας περιφοράς**.

$$\frac{\omega_{lib}}{n} = \frac{m}{k} \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$

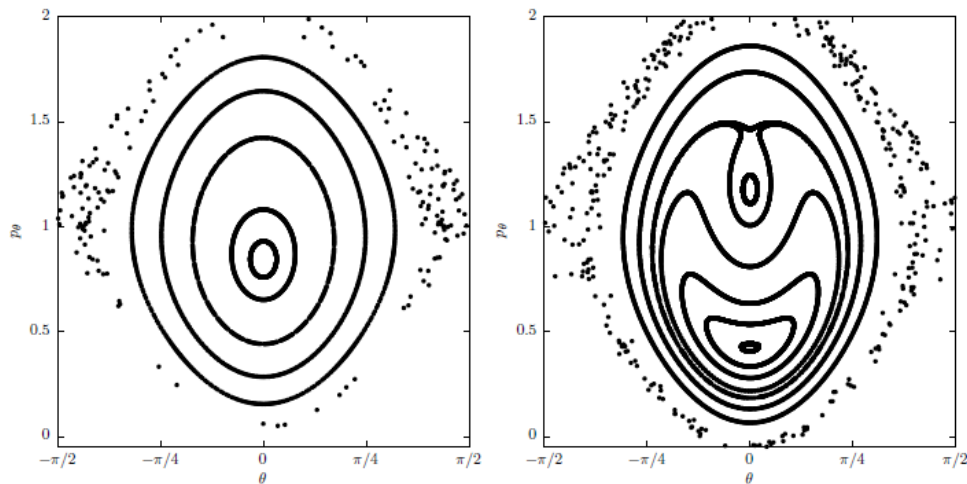
Δευτερεύοντες συντονισμοί του σύγχρονου (1:1) κύριου συντονισμού

$$\omega_{lib,1:1} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{5}{2}e^2 + O(e^4)} \approx \varepsilon \quad n = 1$$

Δευτερεύων Συντονισμός 1:1

$$\varepsilon \approx 1$$

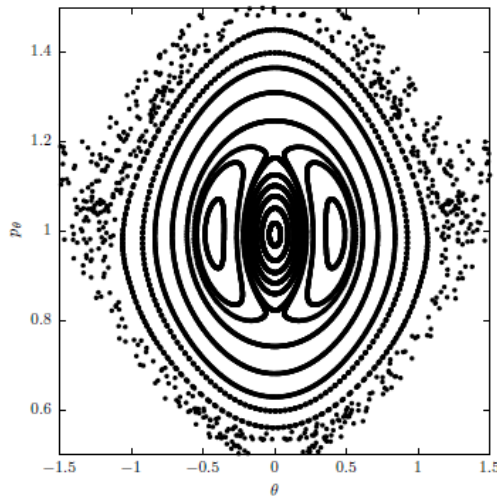
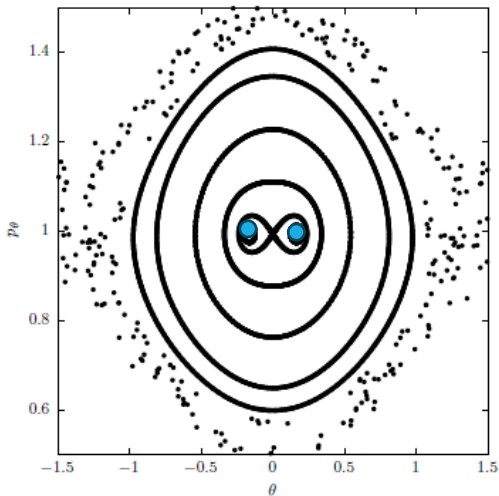
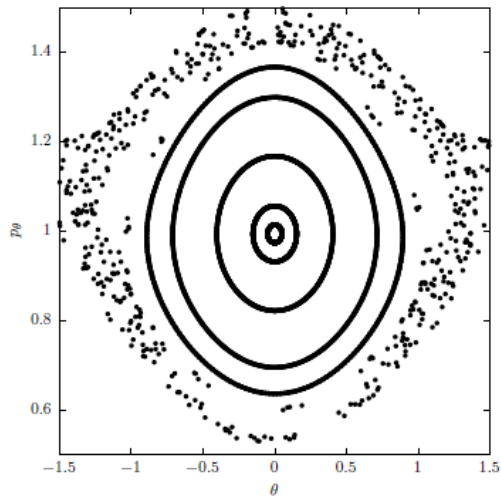
Εμφάνιση δομής μέσα στην περιοχή λίκνισης του κύριου συντονισμού. Διακλάδωση **σάγματος-κόμβου**.



Δευτερεύοντες συντονισμοί

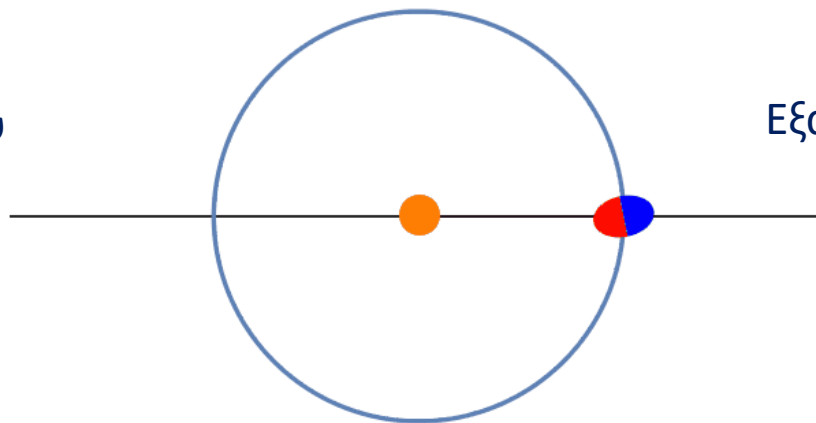
Δευτερέων Συντονισμός 2:1

$$\omega \approx \frac{1}{2}$$



Περιοδική τροχιά •

Διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου.

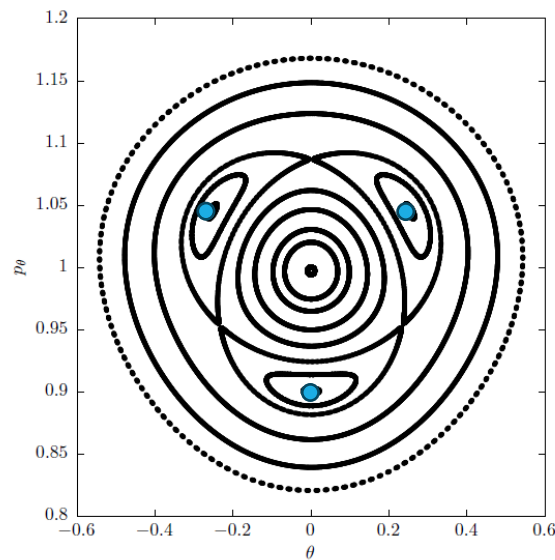
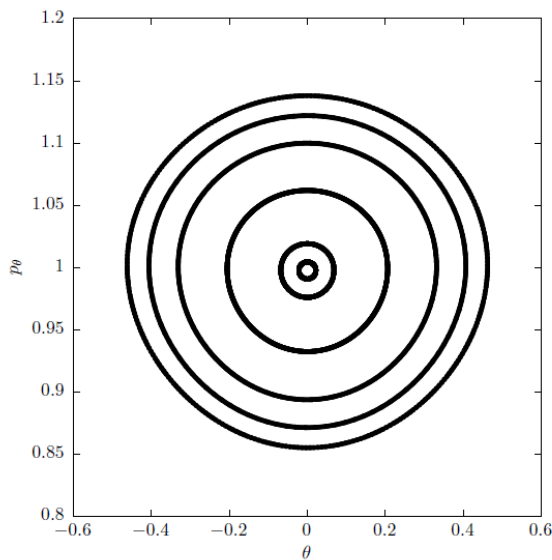


Εξαναγκασμένες λικνίσεις.

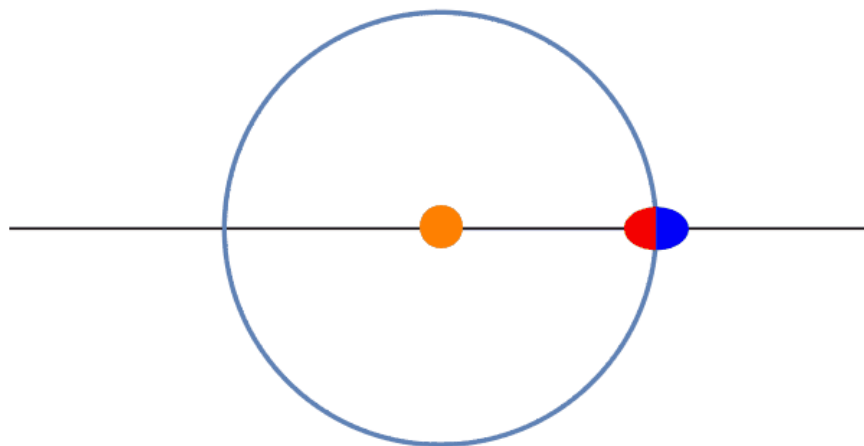
Δευτερεύοντες συντονισμοί

Δευτερέων Συντονισμός 3:1

$$\omega \approx \frac{1}{3}$$



Περιοδική τροχιά ●



Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις λόγω του δευτερεύοντος συντονισμού έχουν προταθεί για την εξήγηση της γεωλογίας του Εγκέλαδου (παλιρροιακή θέρμανση).

Μοντέλα δευτερευόντων συντονισμών

Μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικά μοντέλα και για τους δευτερεύοντες συντονισμούς χρησιμοποιώντας **κανονική θεωρία διαταραχών** – γενίκευση του averaging.

Δευτερέων Συντονισμός 1:1

$$H = \delta J_R - 2e^2 J_R^2 - \frac{1}{4} J_R^2 - e\sqrt{2J} \cos(\phi_R) + \sqrt{2}eJ_R^{3/2} \cos(\phi_R) - \frac{3}{2}e\sqrt{2J_R}\delta \cos(\phi_R) - e^2 J_R \cos(\phi_R) + \dots$$

Δευτερέων Συντονισμός 2:1

$$H = \delta J_R + \frac{89}{128}e^2 J_R - \frac{1}{4} J_R^2 - eJ_R \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}\delta \right) \cos(2\phi_R) + \dots$$

Δευτερέων Συντονισμός 3:1

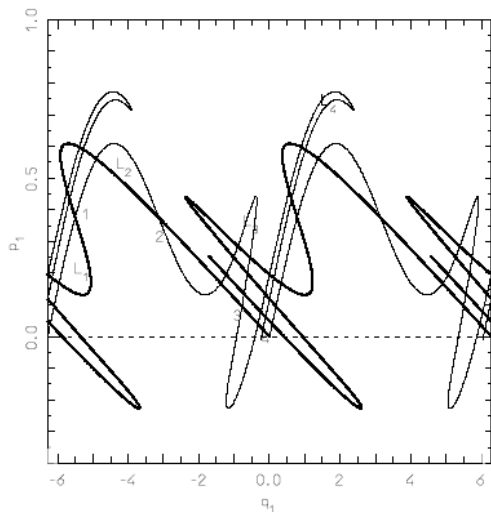
$$H = \delta J_R - \frac{1}{4} J_R^2 - \frac{4}{15}e^2 J_R - \sqrt{\frac{2}{27}}eJ_R^{3/2} \cos(3\phi_R) + \dots$$

Με τις αναλυτικές προσεγγίσεις μπορούμε να προβλέψουμε όλες τις διακλαδώσεις των περιοδικών τροχιών που παρατηρούμε στις τομές Poincaré!

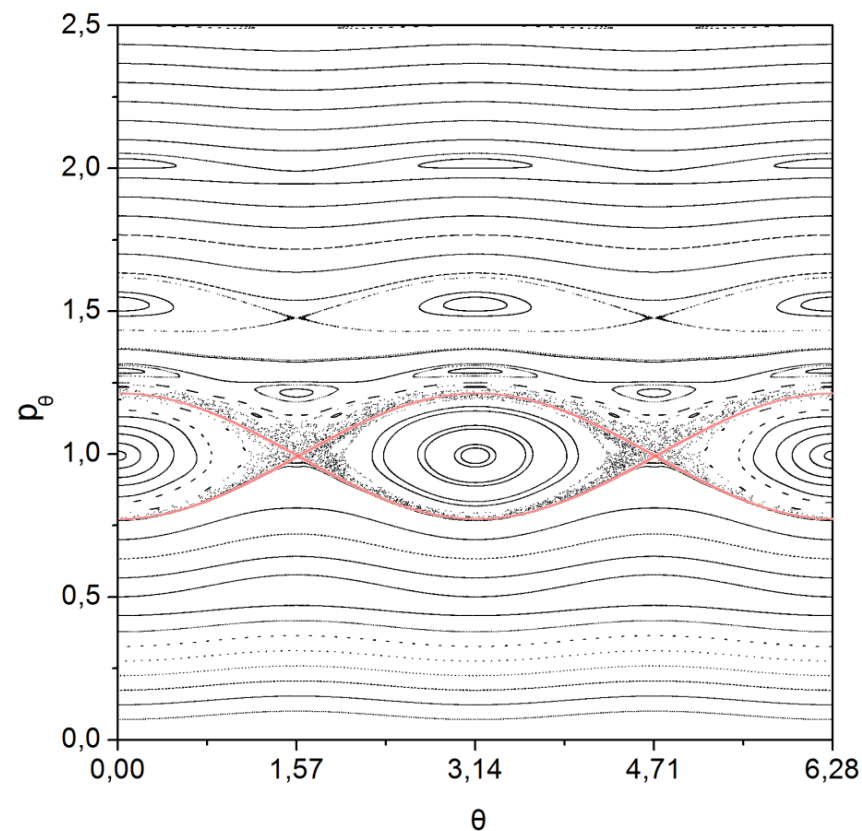
Διαταραγμένη δυναμική συντονισμού

Πόσο καλό είναι το αναλυτικό μοντέλο του συντονισμού; Εξαρτάται από το μέγεθος των όρων που παραλείπουμε!

$$H = J_\phi + H_{res}(J_\psi, \psi) + R(\psi, \phi)$$



Οι ομοκλινικές τομές της **ευσταθούς** με την **ασταθή** πολλαπλότητα οδηγούν σε **χαοτική** συμπεριφορά!



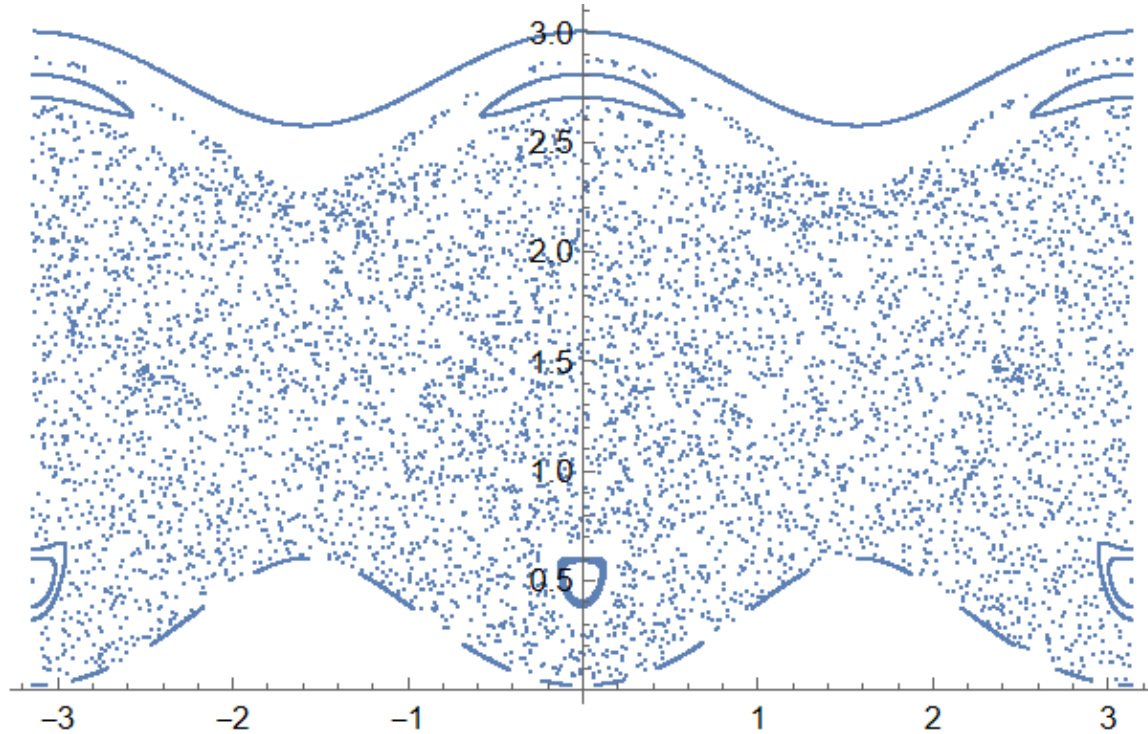
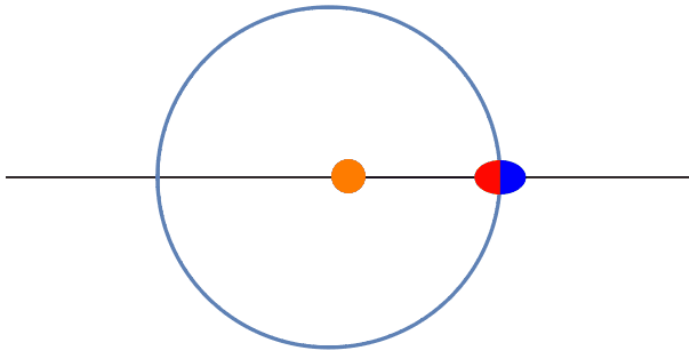
Η χαοτική περιστροφή του Υπερίωνα

Χαρακτηριστικά:

- Ασφαιρικό σχήμα $\epsilon = 0.89$
- Μεγάλη εκκεντρότητα $e = 0.1235$
- 4:3 συντονισμός μέσης κίνησης με τον Τιτάνα
- Παρατηρούμενη χαοτική περιστροφή



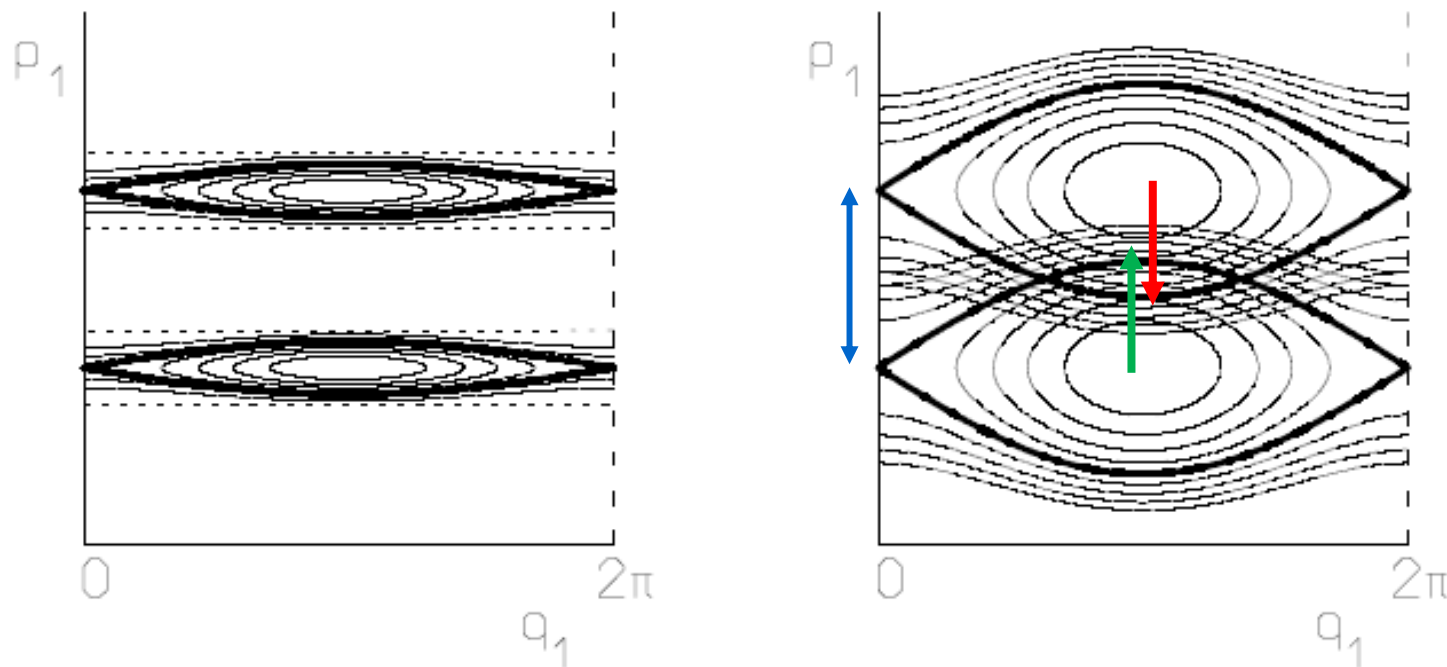
Τομή Poincaré



Εκτεταμένη χαοτική θάλασσα καλύπτει την περιοχή των συντονισμών 1:1 και 3:2.

Αλληλοεπικάλυψη συντονισμών

Πότε δύο συντονισμοί αλληλεπικαλύπτονται;

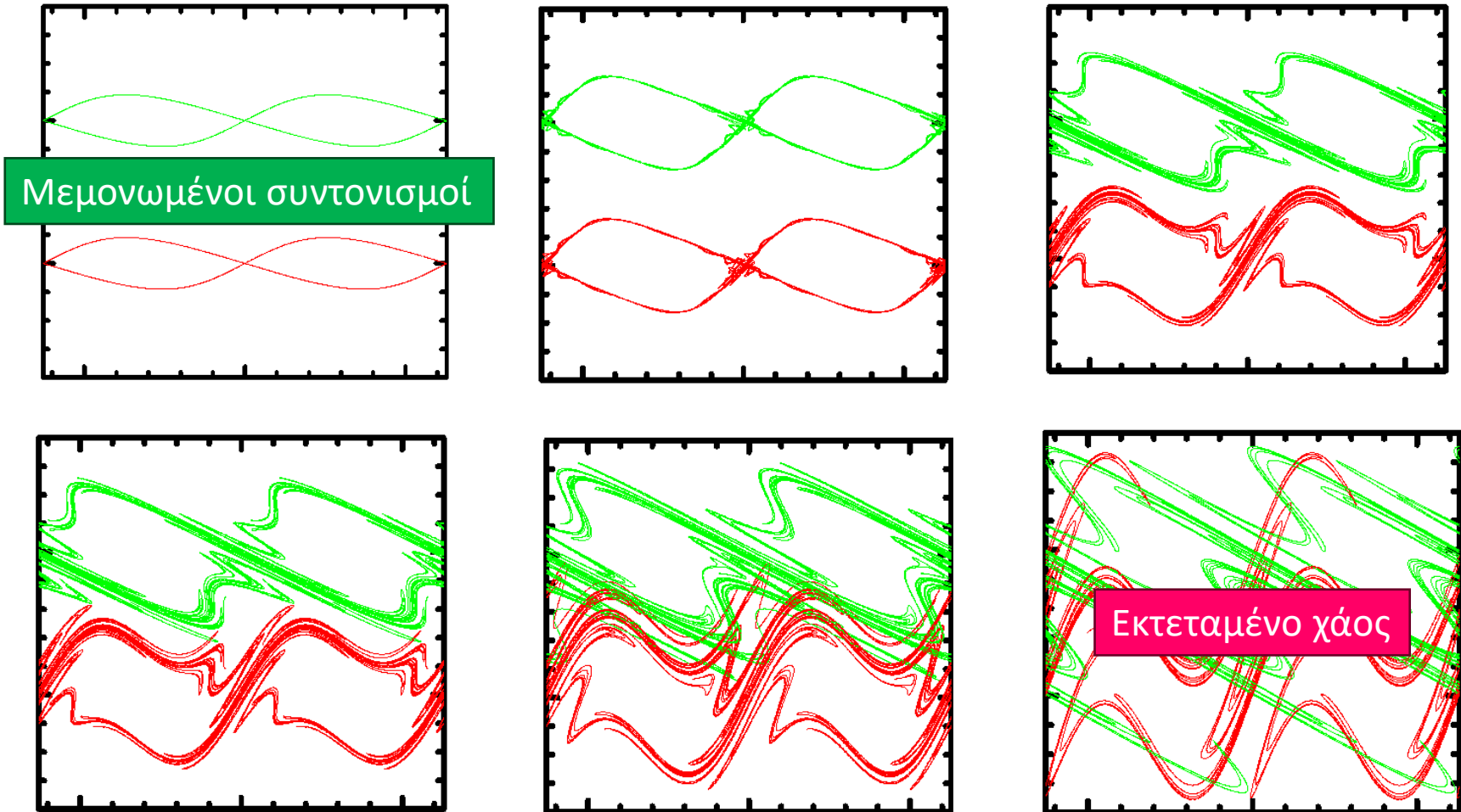


Κριτήριο του Chirikov: $\Delta_{res_1} + \Delta_{res_2} > |P_{res_1}^* - P_{res_2}^*|$

Όταν το άθροισμα των **ημιεύρων** των δύο συντονισμών είναι μεγαλύτερο από την απόσταση μεταξύ των κέντρων τους.

Αλληλοεπικάλυψη συντονισμών

Ομοκλινικές και ετεροκλινικές τομές



Κριτήριο του Chirikov για τον Υπερίωνα

Οι δύο συντονισμοί με το μεγαλύτερο ημιεύρος είναι ο 1:1 και ο 3:2. Τα ημιεύρη τους είναι:

$$\Delta_{1:1} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{5}{2}e^2 + O(e^4)} \quad \Delta_{3:2} = \varepsilon \sqrt{\frac{7}{2}e + O(e^3)}$$

Τα κέντρα των δύο συντονισμών είναι

$$P_{\theta,1:1}^* = 1, \quad P_{\theta,3:2}^* = 1.5$$

Από το κριτήριο του Chirikov έχω:

$$\Delta_{1:1} + \Delta_{3:2} > |P_{\theta,1:1}^* - P_{\theta,3:2}^*|$$

Οπότε για τιμές της ασφαιρικότητας $\varepsilon > \frac{1}{2 + \sqrt{14}e}$

έχουμε **αλληλοεπικάλυψη συντονισμών** και **εκτεταμένη χαοτική περιοχή**.

Για τιμή της εκκεντρότητα του Υπερίωνα $e=0.1$ έχουμε $\varepsilon > 0.314$, κατώφλι πολύ μικρότερο από την παρατηρούμενη ασφαιρικότητα του $\varepsilon=0.89$!

By a strange caprice of history, the modern celestial mechanics was founded by an alchemist – Isaac Newton. Not pushing the analogy too far, we can say that analytical procedures of celestial mechanics still resemble the efforts of alchemists. We distil Hamiltonians in order to achieve the integrable “essence” and since the times of Poincaré we know that the ultimate goal, a transmutation of a non-integrable system into an integrable one, remains out of our reach.

-Sławomir Breiter

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!