

ΜΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΜΒΑΠΤΙΣΜΕΝΟΥ ΟΡΙΟΥ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΠΟΛΥΦΑΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΣΥΝΕΧΗ ΠΕΔΙΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ

Στέργιος Γ. Γιάντσιος*

Τμήμα Χημικών Μηχανικών, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

(* [e-mail: yiantsio@auth.gr](mailto:yiantsio@auth.gr))

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παρουσιάζεται μια πρόταση για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων μεταφοράς μάζας σε πολυφασικά συστήματα, όπου η συγκέντρωση των συστατικών μπορεί να παρουσιάζει ασυνέχειες στα όρια μεταξύ των φάσεων. Χρησιμοποιείται ένα σταθερό δομημένο πλέγμα το οποίο δεν είναι συμβατό με τις πιθανώς πολύπλοκες ή ακόμη και εξελισσόμενες διεπιφάνειες, στο ίδιο πνεύμα με πολυάριθμες εργασίες της βιβλιογραφίας που επικεντρώνονται στη δυναμική πολυφασικών ροών που περιέχουν στερεά σωματίδια, μη-αναμίξιμα ρευστά, ελαστικές ενσωματωμένες δομές, κ.λπ. Το χαρακτηριστικό στοιχείο της πρότασης είναι ότι οι ασυνέχειες αποτυπώνονται στην εξίσωση μεταφοράς συμπεριλαμβάνοντας μια κατανομή ιδιόμορφων πηγών τύπου διπόλου κατά μήκος των διεπιφανειών. Επιπλέον, το μέγεθος των ασυνεχειών και η ένταση του πεδίου των διπόλων δεν χρειάζεται να προκαθορίζονται, αλλά βρίσκονται ως μέρος της λύσης μέσω μιας συνθήκης συμβατότητας στο σύνθετο πεδίο συγκέντρωσης. Παρουσιάζεται μια αριθμητική υλοποίηση που βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και συζητούνται παραδείγματα που καταδεικνύουν την εγκυρότητα της προσέγγισης. Επιπλέον, συζητούνται διάφοροι τύποι προβλημάτων μεταφοράς μάζας σε πολυφασικά συστήματα και παρουσιάζονται παραδείγματα όπου θα μπορούσε να βρει εφαρμογή.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Μεταφορά μάζας, Πολυφασικές ροές, Μέθοδος εμβαπτισμένου ορίου, Αδροποιημένη συνάρτηση Dirac

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι πολυφασικές ροές περιλαμβάνουν ένα ευρύ φάσμα εκδηλώσεων και εφαρμογών στη φύση και την τεχνολογία. Περιβαλλοντικές ροές στους ωκεανούς και την ατμόσφαιρα, ροές σε πορώδη μέσα, αντιδραστήρες στερεάς και ρευστοστεράς κλίσης, συσκευές φυσικών διεργασιών, ροές εναιωρημάτων και γαλακτωμάτων, βιολογικές ροές στα αιμοφόρα αγγεία και στους ιστούς είναι μερικά ενδεικτικά παραδείγματα. Κοντά στις αρχές του αιώνα, η εμφάνιση αρκετών πρωτοποριακών εργασιών για την άμεση αριθμητική προσομοίωση πολυφασικών ροών εισήγαγε τις μεθόδους immersed boundary, level-set, front-tracking, immersed interface, fictitious domain^[1-5]. Αυτές οι εργασίες έχουν παρακινήσει έναν τεράστιο όγκο έρευνας και έχουν αναγνωρισθεί με πολλές χιλιάδες αναφορές. Ένα χαρακτηριστικό που μοιράζονται όλες οι μέθοδοι είναι ότι χρησιμοποιούν ένα απλό, σταθερό, δομημένο αριθμητικό πλέγμα για την αριθμητική περιγραφή των μεταβλητών, ανεξάρτητα από τη θέση, το σχήμα και την πολυπλοκότητα των διεπιφανειών μεταξύ των διαφορετικών φάσεων.

Μπορεί να παρατηρηθεί, ωστόσο, ότι η συντριπτική πλειονότητα των εργασιών εστιάζεται κυρίως στις εξισώσεις ορμής και στην κατανομή των φάσεων, τη μορφολογία και την εξέλιξη των διεπιφανειών, όπως μπορεί να βρεθεί σε τόσες πολλές εντυπωσιακές εργασίες που μελετούν τη δυναμική των ροών που περιέχουν στερεά σωματίδια^[5], μη αναμίξιμα ρευστά^[4,6], ελαστικές ενσωματωμένες δομές^[7], κ.λπ. Από την άλλη πλευρά, οι αριθμητικές μελέτες για τη μεταφορά θερμότητας και μάζας σε πολυφασικά συστήματα είναι συγκριτικά λιγότερες, π.χ., μεταφορά θερμότητας με αλλαγή φάσης κατά την κρυστάλλωση ή τον βρασμό^[8,9]. Η εστίαση στην παρούσα

εργασία είναι σε περιπτώσεις όπου ένα διαλυμένο συστατικό εμφανίζει ασυνέχειες λόγω αδιαπερατότητας σε μια από τις φάσεις ή λόγω διαφορετικής διαλυτότητας, όπως μπορεί να υπαγορεύεται από την ισορροπία φάσεων. Ένα παράδειγμα είναι τα πορώδη μέσα που περιέχουν αδιαπέραστα στερεά σωματίδια όπου η ροή συστατικών μηδενίζεται στην επιφάνεια των σωματιδίων και η συγκέντρωση πρέπει να είναι μηδενική στο εσωτερικό τους. Υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις και επεκτάσεις, όπως η ρόφηση και εκρόφηση από στερεές επιφάνειες, η εναπόθεση ή διαλυτοποίηση στερεών σωμάτων, η μεταφορά μεταξύ μη-αναμίξιμων φάσεων χωρίς διεπιφανειακή συσσώρευση (π.χ., στην απόσταξη και την εκχύλιση), η μεταφορά διαλυτού διεπιφανειακού με διεπιφανειακή συσσώρευση, κ.α.

ΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Ας εξετάσουμε ένα απλό 1-D παράδειγμα διάχυσης συστατικού, το οποίο εμφανίζει ένα άλμα, Δc , σε κάποιο σημείο. Σε κάποια γειτονιά αυτού του σημείου, που εδώ για ευκολία τοποθετείται στην αρχή των αξόνων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια βηματική συνάρτηση Heaviside, $H(x)$, και να εκφράσουμε τη συγκέντρωση, c , σε πρώτη προσέγγιση ως

$$c = \Delta c H(x). \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{dc}{dx} = \Delta c \delta(x), \quad (2)$$

όπου $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac, και

$$\frac{d^2c}{dx^2} = \Delta c \frac{d\delta(x)}{dx}. \quad (3)$$

Ως εκ τούτου, εάν η δεύτερη παράγωγος θεωρηθεί ως τελεστής διάχυσης, το άλμα μπορεί να προκληθεί εάν συμπεριλάβουμε στην εξίσωση μεταφοράς ένα δίπολο κατάλληλης ισχύος, το οποίο λειτουργεί ως φράγμα που αποτρέπει τη διάχυση από την περιοχή της υψηλής προς τη χαμηλή συγκέντρωση. Προχωρώντας τώρα σε ένα πρόβλημα 2-D ή 3-D και εστιάζοντας στα βασικά στοιχεία της προσέγγισης, διατηρούμε προς το παρόν μόνο τον όρο διάχυσης στην εξίσωση μεταφοράς και για τον ίδιο λόγο, ορίζουμε επίσης τον συντελεστή διάχυσης ίσο με τη μονάδα. Σε άμεση αναλογία με την Εξ. (3) παραπάνω, κατανέμουμε ένα σύνολο δίπολων κατά μήκος της διεπιφάνειας, S ,

$$\nabla^2 c + \oint_S \lambda(\mathbf{x}_s) [-\nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}] ds = 0, \quad (4)$$

όπου \mathbf{x} είναι οποιοδήποτε σημείο του συνολικού πεδίου, \mathbf{x}_s είναι ένα σημείο στη διεπιφάνεια και \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια που δείχνει προς τη ρευστή φάση. Το πεδίο $\lambda(\mathbf{x}_s)$ αντιπροσωπεύει την ισχύ των διπόλων τα οποία κατανέμονται στη διεπιφάνεια και είναι απαραίτητα για να προκληθούν τα κατάλληλα άλματα συγκέντρωσης.

Για να ολοκληρώσουμε το πρόβλημα και να το αντιμετωπίσουμε αριθμητικά, χρησιμοποιούμε έννοιες από τη μέθοδο front-tracking των Tryggvason *et al.*^[4] και ορίζουμε μια βηματική συνάρτηση, H , η οποία παίρνει την τιμή ένα στη φάση του ρευστού και μηδέν στη στερεή αδιαπέραστη φάση. Ο αυστηρός ορισμός της μπορεί να δοθεί μέσω ενός ολοκληρώματος στη ρευστή φάση

$$H(\mathbf{x}) = \int_{V_f} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) dV_f. \quad (5)$$

Τώρα, σε μία επαρκώς μικρή γειτονιά οποιουδήποτε σημείου της διεπιφάνειας, το πεδίο συγκέντρωσης μπορεί να γραφεί ως

$$c = \Delta c(\mathbf{x}_s)H(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Κατά συνέπεια, σε πρώτη προσέγγιση, η κλίση της συγκέντρωσης κάθετα στη διεπιφάνεια θα είναι

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} = \Delta c(\mathbf{x}_s)(\nabla H \cdot \mathbf{n}). \quad (7)$$

Αξιοποιώντας τη συνάρτηση δέλτα, η πρώτη συνθήκη, (6), μπορεί να γραφεί ως

$$\int_V c(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)dV = \Delta c(\mathbf{x}_s) \int_V H(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)dV, \quad (8)$$

και, ομοίως, μπορούμε να γράψουμε τη δεύτερη συνθήκη, (7), ως

$$\int_V c(\mathbf{x})\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} dV = \Delta c(\mathbf{x}_s) \int_V H(\mathbf{x})\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}dV. \quad (9)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τα (8) και (9), εξαλείφουμε το άγνωστο άλμα, Δc , και λαμβάνουμε την συνθήκη συμβατότητας που πρέπει να ικανοποιείται από το πεδίο συγκέντρωσης σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας, δηλαδή

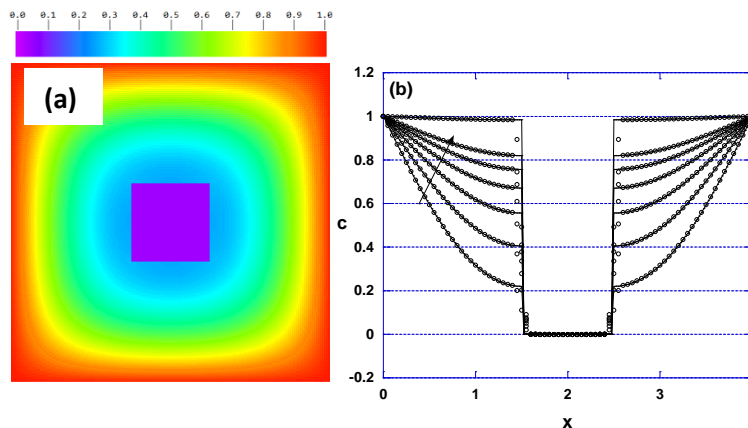
$$\int_V c(\mathbf{x})\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} dV = \left[\frac{\int_V H(\mathbf{x})\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} dV}{\int_V H(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)dV} \right] \int_V c(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)dV. \quad (10)$$

Αυτή η συνθήκη ολοκληρώνει το πρόβλημα και επιτρέπει τον προσδιορισμό της ισχύος των δίπολων, που λειτουργούν ως πολλαπλασιαστές Lagrange.

Αν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές αριθμητικές μέθοδοι, στην παρούσα εργασία υιοθετήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων^[10].

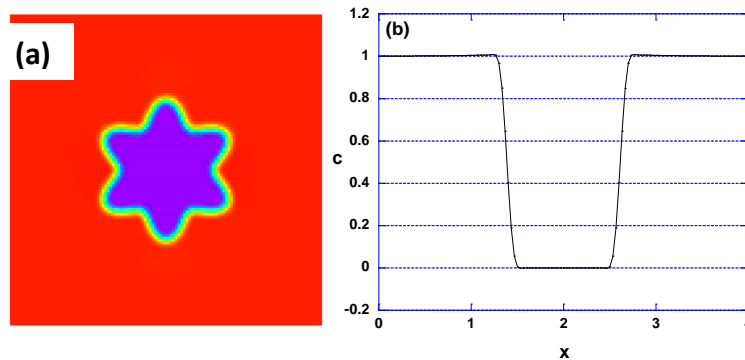
ΜΕΡΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Για λόγους σύγκρισης με μια συμβατική προσέγγιση, θεωρούμε ένα απλό παράδειγμα χρονομεταβαλλόμενης μεταφοράς μάζας μέσα σε ένα τετραγωνικό χωρίο που περιέχει ένα μικρότερο αδιαπέραστο έγκλεισμα, επίσης τετραγωνικού σχήματος. Στο εξωτερικό όριο η συγκέντρωση θεωρείται σταθερή και ομοιόμορφη, ενώ στο εσωτερικό όριο επιβάλλονται συνθήκες μηδενικής ροής. Στο Σχ. 1α, εμφανίζεται ένα στιγμιότυπο του πεδίου συγκέντρωσης σε έναν ενδιαμέσο χρόνο. Στο Σχ. 1β φαίνεται η εξέλιξη της κατανομής της συγκέντρωσης σε οριζόντιες τομές που διέρχονται από το κέντρο της περιοχής. Η σύγκριση με την άμεση συμβατική λύση, που εμφανίζεται με τις συνεχείς γραμμές, είναι πειστική.



Σχήμα 1. (α) Στιγμιαία κατανομή συγκέντρωσης κατά τη διάχυση προς ένα αρχικά άδειο χωρίο με αδιαπέραστο στερεό έγκλεισμα. (β) Κατανομές συγκέντρωσης κατά μήκος μιας οριζόντιας εγκάρσιας τομής σε διάφορες χρονικές στιγμές. Οι συνεχείς γραμμές λαμβάνονται από μια συμβατική επίλυση και οι κύκλοι είναι τα αποτελέσματα από την προτεινόμενη μέθοδο εμβαπτισμένου ορίου.

Στο Σχ. 2, παρουσιάζονται παρόμοια αποτελέσματα για στερεό έγκλεισμα με καμπύλη διεπιφάνεια, η οποία τώρα δεν είναι συμβατή με το πλέγμα.

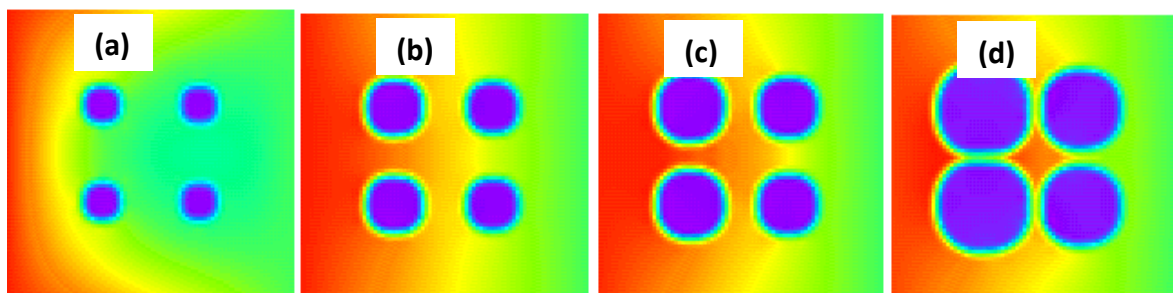


Σχήμα 2. (α) Τελική κατανομή συγκέντρωσης σε χρωματική απεικόνιση, για την περίπτωση αδιαπέραστου εγκλεισμού με σχήμα μη-συμβατό με το δομημένο πλέγμα. (β) Κατανομή συγκέντρωσης κατά μήκος μιας οριζόντιας εγκάρσιας τομής μέσω του κέντρου της περιοχής.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΑΖΑΣ

α) Εναπόθεση σε μια στερεή επιφάνεια

Σε ορισμένες εφαρμογές, η διαλυμένη ουσία μπορεί να σχηματίζει επικαθίσεις και να μεταβάλλει τον όγκο και το σχήμα της στερεής φάσης. Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε καθίζηση διαλυμένων αλάτων και κρυστάλλωση στη στερεή επιφάνεια ή άλλα παρόμοια φαινόμενα και μηχανισμούς, π.χ. όπως στην ιστομηχανική για την οστική ανάπτυξη πάνω σε πολύπλοκες επιφάνειες ικριωμάτων λόγω της μεταφοράς κυττάρων, αυξητικών παραγόντων και άλλων συστατικών^[11]. Στο απλουστευμένο παράδειγμα στο Σχ. 3 φαίνονται τέσσερα κυκλικά σωματίδια σε ένα τετράγωνο, τα οποία εκδηλώνουν ανάπτυξη κάθετα προς τα σύνορά τους με ρυθμό ανάλογο της επιφανειακής συγκέντρωσης συστατικού.



Σχήμα 3. Στιγμιότυπα πεδίων συγκέντρωσης κατά τη διάχυση γύρω από αδιαπέραστα σωματίδια, τα οποία αναπτύσσονται με ρυθμό ανάλογο με την τοπική συγκέντρωση. Η συγκέντρωση στο αριστερό όριο θεωρείται υψηλότερη και τα σωματίδια στα αριστερά αναπτύσσονται με ταχύτερο ρυθμό.

β) Προσρόφηση και εκρόφηση από στερεή επιφάνεια

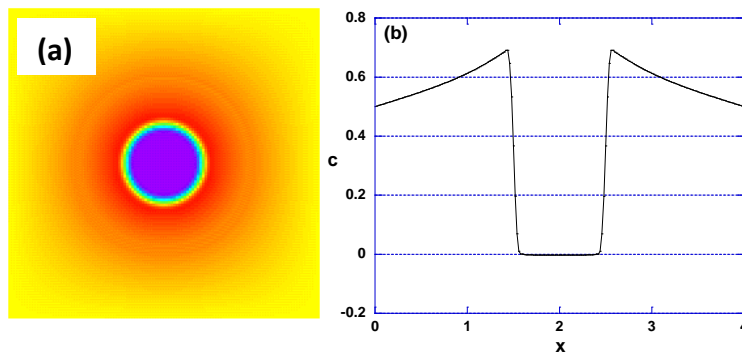
Ας εξετάσουμε επίσης την περίπτωση όπου το στερεό υπόστρωμα μπορεί να προσροφά ή να εκκλύει τη διαλυμένη ουσία. Επομένως, μπορεί να οριστεί μια επιφανειακή συγκέντρωση, c_s , και να γραφτεί μια εξίσωση διατήρησης του προσροφημένου συστατικού, π.χ. μια απλή γραμμική σχέση

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = -k_1 c_s + k_2 c(\mathbf{x}_s). \quad (11)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί σκέλος περιέχει την τιμή στην κύρια μάζα του ρευστού ακριβώς στη διεπιφάνεια. Κατά συνέπεια, στην περιγραφή του πεδίου συγκέντρωσης σε ολόκληρο το πεδίο πρέπει να συμπεριληφθεί ένας όρος πηγής στην εξίσωση μεταφοράς με τη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c + \oint_S \lambda(\mathbf{x}_s) [-\nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}] ds + \oint_S [k_1 c_s - k_2 c] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) ds. \quad (12)$$

Το παράδειγμα που φαίνεται στο Σχ. 4 είναι και μια απλουστευμένη περιγραφή φαινομένων σε εφαρμογές ιστομηχανικής κατά την ανάπτυξη οστών, συγκεκριμένα της απελευθέρωσης αυξητικού παράγοντα από τις επιφάνειες των ικριωμάτων^[12]. Από κυκλικό σωματίδιο που περιέχεται σε ένα τετράγωνο χωρίο, υπάρχει τάση για έκλυση του συστατικού. Τα επίπεδα συγκέντρωσης είναι μέγιστα κοντά στο σωματίδιο και μειώνονται προς το όριο, ενώ παραμένουν ίσα με το μηδέν εντός του στερεού.



Σχήμα 4. (α) Τελική κατανομή συγκέντρωσης με χρωματική απεικόνιση γύρω από αδιαπέραστο έγκλεισμα. Το διαχεόμενο συστατικό απελευθερώνεται από τη διεπιφάνεια. (β) Κατανομή συγκέντρωσης κατά μήκος μιας οριζόντιας εγκάρσιας τομής μέσω του κέντρου της περιοχής.

γ) Μεταφορά με συναγωγή στο ρευστό

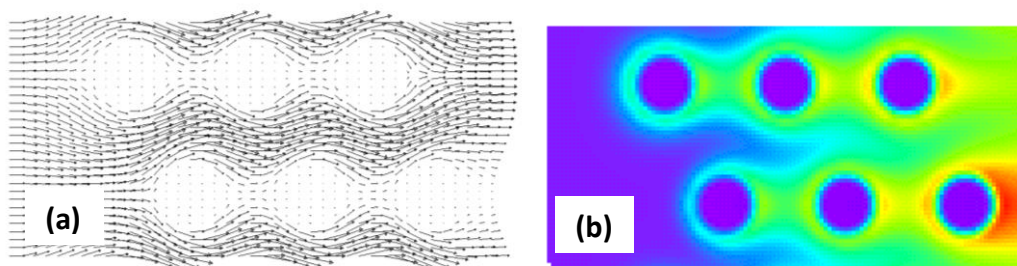
Στο απλό παράδειγμα που παρουσιάζεται στο Σχ. 5 το διαλυμένο συστατικό απελευθερώνεται από τις επιφάνειες των σωματιδίων και μεταφέρεται σύμφωνα με μια παρόμοια εξίσωση

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}c = \frac{1}{Pe} \nabla^2 c + \oint_S \lambda(\mathbf{x}_s) [-\nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}] ds + \oint_S [k_1 c_s - k_2 c] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) ds. \quad (13)$$

Το πεδίο ροής σε ολόκληρη την περιοχή, συμπεριλαμβανομένων των στερεών σωματιδίων, περιγράφεται με το ίδιο δομημένο πλέγμα και τη μέθοδο fictitious domain^[5,13]

$$Re \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + \int_B \lambda_F(\mathbf{x}_B) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) d\mathbf{x}, \quad (14)$$

όπου το πεδίο των πολλαπλασιαστών Lagrange, λ_F , επιβάλλει μηδενική ταχύτητα στο χώρο που καταλαμβάνεται από τα σωματίδια.



Σχήμα 5. (α) Το πεδίο ταχύτητας, όπου η ροή εισέρχεται ομοιόμορφα από τα αριστερά και παραμορφώνεται από τα συμπαγή εμπόδια. (β) Η συγκέντρωση συστατικού που απελευθερώνεται από τις επιφάνειες των σωματιδίων και μεταφέρεται από τη ροή. $Re = 0$, $Pe = 20$, $k_1 = k_2 = 0.1$.

δ) Μεταφορά μεταξύ μη-αναμίξιμων φάσεων

Η προσέγγιση μπορεί επίσης να επεκταθεί στην περίπτωση όπου και οι δύο φάσεις είναι ρευστές, αμοιβαία μη αναμίξιμες, και έχουν πεπερασμένη διαλυτότητα σε συστατικό το οποίο δεν συσσωρεύεται στη διεπιφάνεια, όπου ισχύει μια συνθήκη ισορροπίας (π.χ. νόμος του Raoult). Εναλλακτικά, μπορεί η ουσία να είναι ένα διαλυτό επιφανειοδραστικό. Τότε, η διέπουσα εξίσωση για την επιφανειοδραστική ουσία που προσροφάται στη διεπιφάνεια είναι μια επέκταση της Εξ. (11) και πρέπει να περιλαμβάνει τη διάχυση και τη μεταφορά λόγω συναγωγής κατά μήκος της κινούμενης διεπιφάνειας, καθώς και την επίδραση πιθανής διαστολής, δηλ.

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\mathbf{u}_s c_s) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n})c_s = D_s \nabla_s^2 c_s - k_1 c_s + k_2 c(\mathbf{x}_s). \quad (15)$$

ΚΑΤΑΛΗΚΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Αρκετοί τύποι προβλημάτων μεταφοράς μάζας πολλαπλών φάσεων αναφέρθηκαν, όπως μεταφορά σε αδρανή πορώδη μέσα, εναπόθεση σε στερεές επιφάνειες ή διάλυσή τους, προσρόφηση ή εκρόφηση από στερεές επιφάνειες, μεταφορά διαλυτών επιφανειοδραστικών ουσιών, μεταφορά και ανταλλαγή μάζας μεταξύ ρευστών φάσεων και εφαρμογές ιστομηχανικής. Για προβλήματα συναγωγής-διάχυσης, η επαρκής διακριτοποίηση του οριακού στρώματος μεταφοράς μάζας είναι σημαντική και για αυτόν τον λόγο οι τεχνικές προσαρμοστικής βελτίωσης πλέγματος μπορεί να είναι κρίσιμες σε υπολογιστικές μελέτες πλήρους κλίμακας^[14]. Για προβλήματα με εξελισσόμενες διεπιφάνειες, η πρόοδος στις τεχνικές παρακολούθησης τοπολογικών αλλαγών^[15] θα μπορούσε να αξιοποιηθεί άμεσα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Peskin CS. (2002). *Acta Numerica*, 11, 479-517.
- [2] Sussman M, Smereka P, Osher S. (1994). *J. Comput. Phys.*, 114, 146-159.
- [3] Leveque RJ, Li Z. (1994). *SIAM J. Numer. Anal.*, 31, 1019-1044.
- [4] Tryggvason G, Bunner B, Esmaeeli A, Juric D, Al-Rawahi N, Tauber W, Han J, Nas S, Jan Y-J. (2001). *J. Comput. Phys.*, 169, 708-759.
- [5] Glowinski R, Pan T-W, Hesla TI, Joseph DD, Periaux J. (2001). *J. Comput. Phys.*, 169, 363-426.
- [6] Mostert W, Popinet S, Deike L. (2022). *J. Fluid Mech.*, 942, A27
- [7] Balogh P, Bagchi P. (2017). *J. Comput. Phys.*, 334, 280-307.
- [8] Deen NG, Peters EAJF, Padding JT, Kuipers JAM. (2014). *Chem. Eng. Sci.*, 116, 710-724.
- [9] Juric D, Tryggvason G. (1996). *J. Comput. Phys.*, 123, 127-148.
- [10] Orova M, Yiantsios SG. (2024). *J. Eng. Math.*, 145(2), <https://doi.org/10.1007/s10665-024-10332-8>.
- [11] Geris L, Van der Sloten J, Van Oosterwyck H. (2009). *Phil. Trans. R. Soc. A*, 367, 2031-2053.
- [12] Sun X, Su J, Bao J, Peng T, Zhang L, Zhang Y, Yang Y, Zhou X. (2012). *Biomaterials*, 33, 8265-8276.
- [13] Yiantsios SG. (2012). *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 70, 1027-1047.
- [14] Popinet S. (2009). *J. Comput. Phys.*, 228, 5838-5866.
- [15] Shin S, Juric D. (2002). *J. Comput. Phys.*, 180, 427-470.